Лінійна алгебра

Група 121
Викладач Котова О.
18.03.2020 р.

Лекція

Тема: Евклідові векторні простори.

План

1. Означення евклідового векторного простору.
2. Норма вектора. Кут між векторами.
3. Ортонормований базис евклідового простору. Теорема про існування ортогонального базису.
4. Властивості ортонормованого базису.

Короткий зміст лекції:

Означення. Дійсний векторний простір, в якому визначено скалярне множення, називається *евклідовим простором.*

Евклідів простір будемо позначати символом E, а евклідів простір розмірності n – символом E_n.

Теорема 1. Арифметичний векторний простір над полем R із стандартним скалярним множенням є евклідовим.

Означення: *Нормою* вектору евклідового простору називається арифметичний квадратний корінь із скалярного добутку квадрату вектору.

Норма вектору позначається $\|\vec{a}\|$.

Вектор $\vec{a}$ називається *нормованим*, якщо $\|\vec{a}\| = 1$.

Теорема 2. Якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$ - вектори евклідового простору і $\lambda \in R$, то

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$, причому $\|\vec{a}\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$;
3. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ (нерівність Коши-Буняковського);
4. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (нерівність трикутника).

Доведення. Скалярне множення в евклідовому просторі додатньо визначене, тобто $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} > 0$, при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Крім того, $\|\vec{a}\| = 0$ при $\vec{a} = \vec{0}$.

За означенням норми,

$$\|\lambda\vec{a}\| = \sqrt{(\lambda\vec{a}) \cdot (\lambda\vec{a})} = \sqrt{\lambda^2 (\vec{a}, \vec{a})} = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|,$$

тобто виконується (2).

Нерівність (3) вірна, якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$. Тому будемо вважати, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - ненульові вектори.

Для будь-яких α і β маємо нерівність

$$\left(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}\right) \cdot \left(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}\right) \geq 0,$$

або

$$\alpha^2\vec{a}^2-2\alpha\beta\vec{a}\vec{b}+\beta^2\vec{b}^2\geq 0.$$

Нехай $\alpha=\|\vec{b}\|$, $\beta=\|\vec{a}\|$, одержуємо:

$$2\left(\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\right)^2-2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right)\geq 0,$$

$$\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\left(\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|-\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)\geq 0.$$

Оскільки $\vec{a}\neq\vec{0}$ і $\vec{b}\neq 0$, то $\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\neq 0$, отже

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\leq\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|.$$

Замінюємо в цій нерівності $\vec{a}$ на $-\vec{a}$:

$$-\left(\vec{a},\vec{b}\right)\leq\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|.$$

Внаслідок останніх двох нерівностей маємо:

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|\leq\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|.$$

Для доведення (4) достатньо показати, що

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\leq\left(\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|\right)^2.$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right),\text{ тому}$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\left(\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|\right)^2+2\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right)-\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\right).$$

Оскільки $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\leq\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$ другий доданок в праівй частині останньої рівності менше або дорівнює нулю, отже,

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\leq\left(\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|\right)^2.$$

Звідси випливає нерівність

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$$

<u>Означення.</u> Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (відмінними від $\vec{0}$) евклідового простору E називають таке число $\varphi(0\leq\varphi\leq\pi)$, що

$$Cos\varphi=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

Для евклідових просторів одним із основних є поняття *<u>ортонормованого</u>* базису. Цей базис є аналогом прямокутної декартової системи координат у звичайному просторі.

<u>Означення.</u> Система векторів $\vec{a}_1,...,\vec{a}_m$ евклідового простору називається *<u>ортонормованою</u>*, якщо вона ортогональна і кожний її вектор нормований.

Ортонормована система векторів, яка є базисом простору, називається ортонормованим базисом простору.

<u>Теорема 3.</u> У скінченновимірному векторному просторі існують ортонормовані базиси.

<u>Доведення:</u> Нехай E_n - n-вимірний евклідів простір і $n>0$. У цьому просторі існує ортогональний базис. Нехай

$$\vec{b}_1,...,\vec{b}_n \qquad (1)$$

- такий базис. Нормуємо систему (1), тобто утворюємо систему

$$\vec{e}_1 = \left\|\vec{b}_1\right\|^{-1} \cdot \vec{b}_1, \ldots, \vec{e}_n = \left\|\vec{b}_n\right\|^{-1} \cdot \vec{b}_n$$

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}_k\right) = \begin{cases} 1, \text{якщо } i = k, \\ 0, \text{якщо } i \neq k. \end{cases}$$

Отже, система $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ є ортонормованим базисом простору E_n.

<u>Властивості ортонормованого базису.</u>

1. Якщо E_n - *n*-вимірний ненульовий евклідів простір, то будь-яка ортонормована система *n* векторів є ортонормованим базисом простору E_n.
2. Ортонормовану систему векторів ненульового скінченновимірного евклідового простору, яка не є базисом, можна доповнити до ортонормованого базису простору.
3. Якщо $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - ортонормований базис евклідового простору і $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$, $\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n$ - вектори простору, то $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n$ і $\left\|\vec{a}\right\|^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$.
4. Якщо $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - ортонормований базис евклідового простору і $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$, то $\alpha_i = \left(\vec{a}, \vec{e}_i\right)$ для $i = \overline{1, n}$, тобто координати вектора $\vec{a}$ є його проекціями на базисні вектори.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Який векторний простір називається евклідовим?
2. Дайте означення норми вектора та доведіть її властивості.
3. Який вектор називається нормованим?
4. Яка система векторів називається ортонормованою?
5. Дайте означення ортонормованого базису.
6. Як за допомогою будь-якого базису евклідового простору побудувати ортонормований базис?
7. Скільки ортонормованих базисів можна знайти в евклідовому просторі?
8. Як в ортонормованому базису запишеться скалярний добуток елементів $\vec{x}, \vec{y}$?
9. Чи можна за видом скалярного добутку елементів $\vec{x}, \vec{y}$ евклідового простору зробити висновок про те, в якому базисі (ортонормованому або в довільному) записано скалярний добуток? Які теореми у зв'язку з цим вам відомі?
10. Доведіть теорему Піфагора в евклідовому просторі: якщо $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, то $\left|\vec{x} - \vec{y}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2 + \left|\vec{y}\right|^2$. Сформулюйте і доведіть обернену теорему.
11. Нехай $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_S$ - лінійно залежна система векторів евклідового простору. Доведіть, що в процесі ортогоналізації цієї системи на деякому кроці одержиться нульовий вектор.
12. В деякому ортонормованому базисі евклідовогоо простору задана система векторів:

$\vec{x}_1 = (1, 0, 1, -1, 2)$, $\vec{x}_2 = (1, 0, 1, -1, -2)$, $\vec{x}_3 = (1, 0, 3, 0, 0)$, $\vec{x}_4 = (0, 0, 2, 1, 6)$.

Нехай $L = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ - лінійна оболонка.

Знайти

а) розмірність і базис L;

б) в лінійній оболонці побудувати ортогональний базис;

в) Добудувати ортогональний базис лінійної оболонки L до ортогонального базису в евклідовому просторі E_S;

г) Указати в лінійній оболонці L ортогональний базис і добудувати його до ортогонального базису евклідового простору E_S

13. Дано *n*-вимірний куб з ребрами одиничної довжини.

а) Які елементи евклідового простору E_n можна вважати діагоналями куба?

б) Знайдіть довжини діагоналей кубу.

в) Знайдіть кут між діагоналлю і ребром, що виходять із однієї вершини кубу.

14. Нехай $(\vec{e}_p)_4$ - ортонормований базис. Визначити довжини сторін та внутрішні кути трикутника, натягнутого на вектори $\vec{x}, \vec{y}$, які в даному базисі мають координати:

$$\vec{x}_e = (0, 1, 1, 1); \quad \vec{y}_e = (2, 0, -1, -1).$$

Література:

1. Л. Я. Куликов, Алгебра и теория чисел. – М.: Высш.школа, 1979, Гл. 7, §6
2. С. Г. Завало та інші, Алгебра і теорія чисел, Ч. I – К.: Вища шк., 1997, Гл. 7 §31.1; 31.3; 31.4.